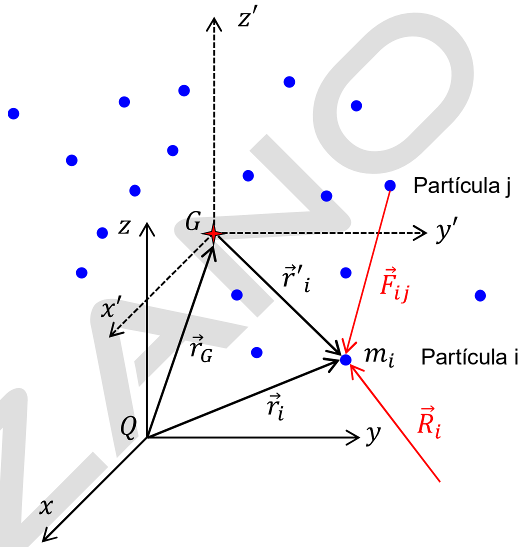
Tema 6.- Dinámica de Sistemas de Partículas
Dinámica del Sólido Rígido: Movimiento Plano

Ejercicio 1.- [**Teoría**] Consideremos el sistema de N partículas de la figura. La partícula $i-ésima$ está ubicada en la posición dada por el vector $\vec{r}_i$, tiene masa m_i y sobre ella actúan dos tipos de fuerzas**: Fuerzas internas**, de interacción con otras partículas del sistema (de carácter central y sujetas al principio de acción y reacción), y **fuerzas externas**, es decir, no vinculadas a las partículas del sistema. Denotamos por $\vec{R}_i$ la fuerza neta externa que actúa sobre la partícula $i-ésima$. Se pide:



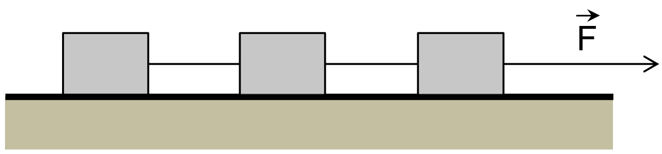
1) Expresión de la masa total y de las coordenadas del centro de masas (CM) del sistema de partículas.
2) Expresiones de la velocidad y aceleración del CM.
3) Expresión de la cantidad de movimiento del sistema en términos de la velocidad del CM.
4) Teniendo en cuenta que $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (es decir, que la fuerza interna que la partícula $j-ésima$ hace sobre la $i-ésima$ cumple el principio de acción y reacción), obtenga el **Teorema del Centro de Masas** (**TCM**). ¿Qué ocurre si la suma de fuerzas externas (o alguna componente de la misma) es nula?

Ejercicio 2

(A) Tres bloques iguales de $5\ kg$ de masa, deslizan sin rozamiento por una superficie horizontal mediante una fuerza F de $30\ N$ aplicada al primer bloque. Suponiendo que las cuerdas que los unen tienen masa despreciable, hallar las tensiones en las mismas y la aceleración con la que se desplazan los bloques. Tómese $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

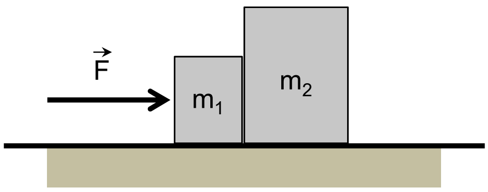
(B) Repita el apartado anterior si existe un coeficiente de rozamiento dinámico entre los bloques y el suelo de valor 0.1.

(C) Mismas preguntas si el coeficiente de rozamiento es ahora de 0.2 y 0.3.



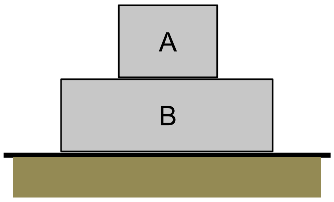
Ejercicio 3.- Dos bloques de masas m_1 y m_2 son empujadas por una fuerza $\vec{F}$ como se indica en la figura. El coeficiente de rozamiento de cada bloque con el suelo es de $0{,}4$. Se pide:

1) Hallar el valor de F si los bloques se desplazan con una aceleración de $200\ cm/s^2$.
2) Hallar, en este caso, la fuerza que ejerce m_1 sobre m_2.



Tómese $m_1 = 300\ g$ y $m_2 = 500\ g$.

Ejercicio 4.- Las masas de los bloques A y B de la figura son m_1 y m_2 respectivamente. Entre A y B el coeficiente de rozamiento es μ; entre el bloque B y el suelo se considera despreciable. Inicialmente, estando B en reposo, se lanza A sobre B con una velocidad v_0. Se pide:

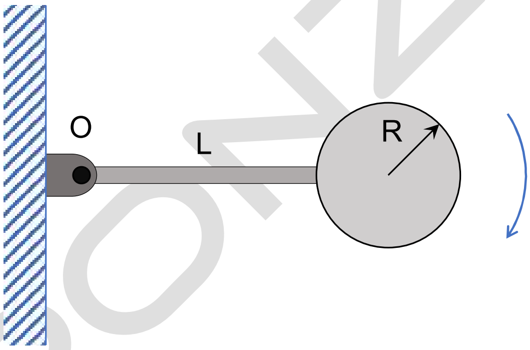


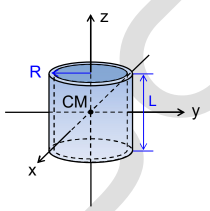
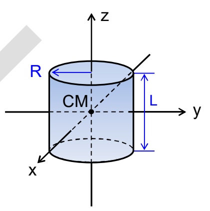
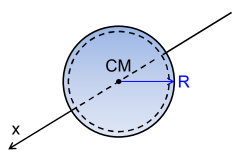
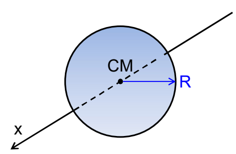
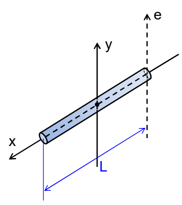
1) Tiempo que transcurre hasta que se igualen las velocidades de A y B.
2) Variación de la cantidad de movimiento del sistema.

Ejercicio 5

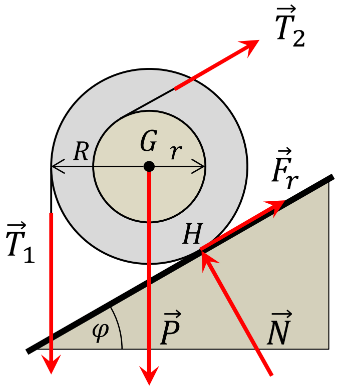
A) [**Momentos de Inercia/Teorema de Steiner**] Se dispone de a) un cilindro homogéneo de masa m y radio R, y b) de una barra homogénea de longitud L y masa M. Obtener el momento de inercia a) del cilindro respecto de un eje tangente al mismo y paralelo a su eje de simetría, y b) de la barra respecto de un eje perpendicular a la misma que pase b.1) por un extremo y b.2) a $L/4$ de su centro.

B) [**Aditividad de momentos de Inercia/Centro de masas**] Obtener el momento de inercia del sistema de la figura respecto de un eje perpendicular a la figura y que pase por O, sabiendo que la barra y la esfera maciza tienen la misma masa $m = 15\ kg$, y que $L = 4R$, siendo $R = 1\ m$. ¿A qué distancia de O está el CM del conjunto? [Solución: $461\ kg \cdot m^2, 3.5\ m$]



Cilindro hueco/aro	Cilindro macizo/disco	Esfera hueca	Esfera maciza	Varilla delgada
				
$I_z = mR^2$	$I_z = \frac{1}{2}mR^2$	$I = \frac{2}{3}mR^2$	$I = \frac{2}{5}mR^2$	$I_y = \frac{1}{12}mL^2$

Ejercicio 6.- Considere el sistema de cinco fuerzas $\{\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_r, \vec{T}_1, \vec{T}_2\}$ dadas en la figura. Obtener la suma de momentos de las mismas a) respecto el punto G y b) Respecto al punto H. Son conocidos R, r y el ángulo φ. Considere positivo el sentido antihorario.



Supongamos que el objeto de la figura es un cilindro homogéneo de masa m que rueda sin deslizar ascendiendo por el plano inclinado. Aplique c) el **Teorema del Centro de Masas** (**TCM**), d) el **Teorema del Momento Cinético** (**TMC**) respecto a G y e) El **TMC** respecto al CIR.

Ejercicio 7.- El sistema de la Figura A representa una polea cilíndrica de radio R y masa m, sobre la que actúa una fuerza F constante conocida y descendente, tal como se indica. Se pide:

a) Valor de la reacción R_G en el gozne G de la polea.
b) Obtener la aceleración angular de la misma, así como la velocidad angular y ángulo girado en función del tiempo, sabiendo que parte del reposo.
c) Energía cinética de la polea en función del tiempo.
d) Trabajo realizado por la fuerza F en función del ángulo girado. ¿En que se traduce ese trabajo?

Figura A

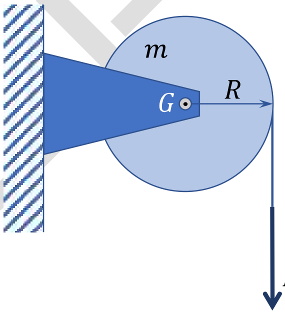
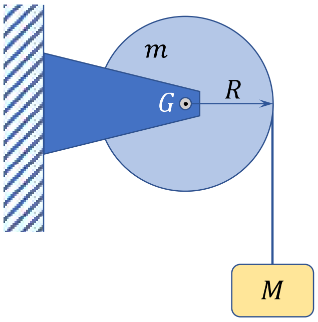


Figura B

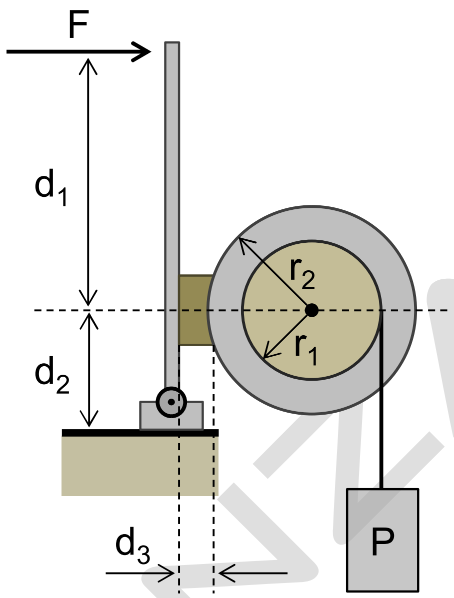


En un segundo experimento, descrito en la Figura B, se cambia la fuerza F por una masa M, de modo que se cumple $F = Mg$ (ver figura). Se pide:

e) Valor de la aceleración angular de la polea y aceleración de la masa M, así como tensión de cuerda.
f) Energía cinética del sistema en función del tiempo, si parte del reposo. Comprobar que su incremento coincide con la suma de los trabajos de las fuerzas que actúan sobre el sistema.

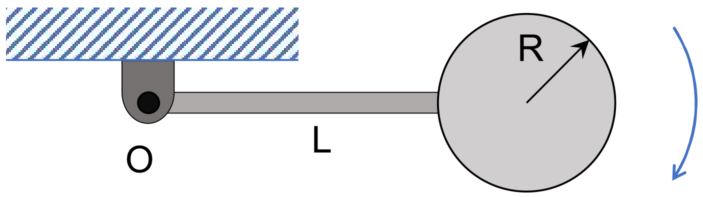
Ejercicio 8.- En la figura el peso P se mueve hacia abajo con una velocidad de $5m/s$. El momento de inercia del rodillo del cilindro vale $I = 1{,}5\ ms^2$; dicho rodillo gira sin rozamientos. En el instante considerado, se aplica la fuerza $\vec{F}$ para frenar su movimiento a través del freno A y el rodillo se para transcurridos 2 segundos. Si el coeficiente de rozamiento entre el freno A y el rodillo es $\mu = 0{,}72$, hallar el valor de $\vec{F}$.

Datos: $r_1 = 0{,}5\ m, r_2 = 0{,}6\ m, d_1 = 0{,}8\ m, d_2 = 0{,}2\ m, d_3 = 0{,}07\ m, P = 20\ N$.

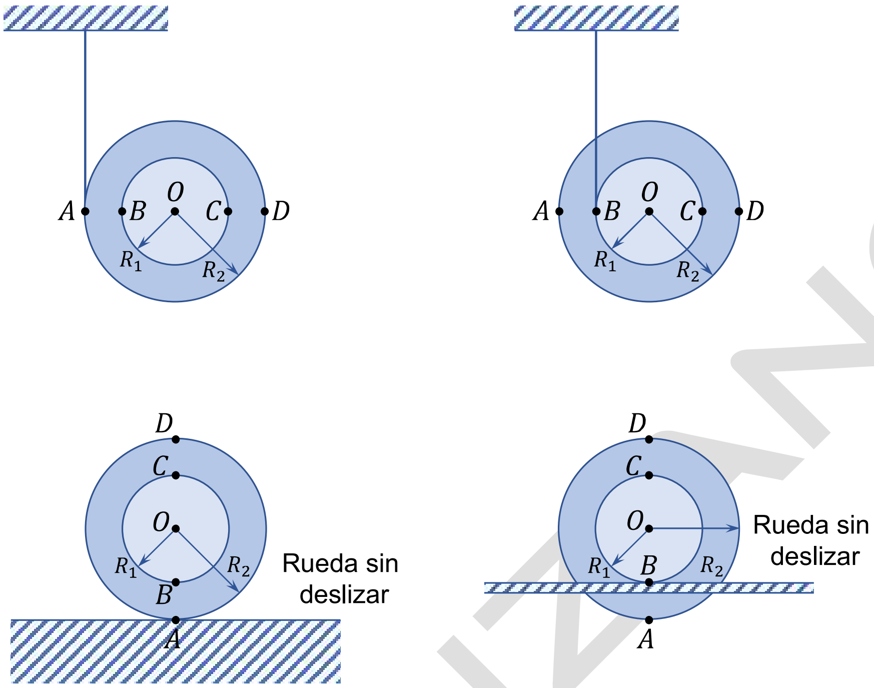


Ejercicio 9.- Se considera el sólido descrito en **Ejercicio 5** - Apartado B) (masa total $M = 30\ kg$; momento de inercia respecto de O, $I_O = 461\ kg \cdot m^2$, distancia del CM a O, $d = 3.5\ m$), el cual puede girar en un plano vertical en torno al extremo O de la varilla, articulado a un punto fijo. En el instante inicial el cuerpo parte de la posición dada en la figura, con la varilla en posición horizontal, y se suelta con velocidad inicial nula (ver Figura). Tomando los ejes XOY definidos del modo habitual y centrados en O, se pide:

1) Obtener la reacción $\vec{R}_O$ en el instante inicial. ¿Cuánto vale la aceleración angular del sistema en ese instante? ¿Y la aceleración del CM?
2) Obtener la reacción $\vec{R}_O$ cuando ha batido 90º. ¿Cuánto vale la aceleración angular del sistema en ese instante? ¿Y la aceleración del CM?
3) [**Bonus**]. Obtener la aceleración normal y tangencial del CM cuando ha batido un ángulo θ entre 0 y 90º, así como el valor de $\vec{R}_O(\theta)$.



Ejercicio 10.- [**Ligaduras cinemáticas (I)**] Los discos de las figuras poseen una aceleración angular α en sentido horario. Calcular las aceleraciones tangenciales (es decir, en el sentido de la velocidad de sus centros O) de los puntos A, B, O, C y D.



Ejercicio 11 [**Ligaduras cinemáticas (II)**]

Figura 1: El disco de la figura 1 RSD con aceleración angular α en sentido horario sobre un suelo que a su vez posee una aceleración a_S hacia la derecha. Calcular las aceleraciones en dirección horizontal de los puntos A, B, O, C y D.

Figura 2: El disco de la figura 2 desciende amarrado del techo por un cable con rozamiento, de modo que no desliza sobre el mismo, con aceleración angular α en sentido horario. A su vez, el techo desciende con una aceleración a_T. Calcular las aceleraciones en dirección vertical de los puntos A, B, O, C y D.

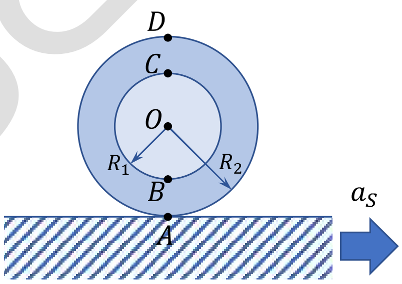


Figura 1

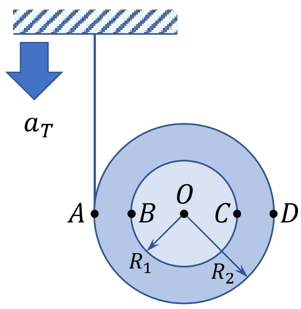
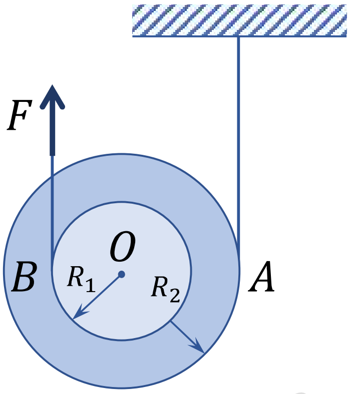


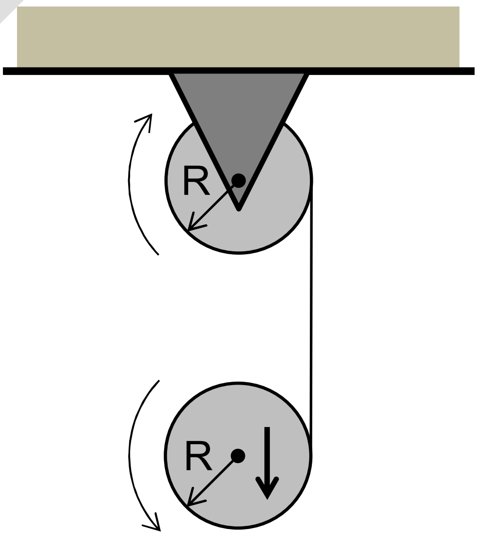
Figura 2

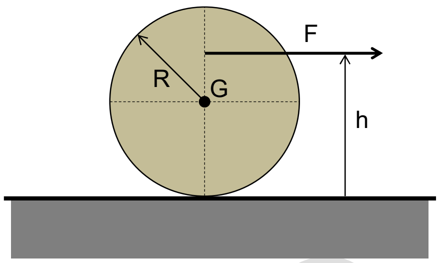
Ejercicio 12.- Se considera una polea con doble arrollamiento, en su radio mayor que vale $0.9\ m$ se arrolla un hilo atado en su otro extremo al techo, mientras que, en su radio menor, que mide $0.4\ m$, se encuentra un hilo arrollado del cual se tira hacia arriba con una fuerza $14.3\ N$. Si la polea tiene un peso de valor $8.4\ N$ y el momento de inercia de la polea respecto a su dentro vale $0.2\ kg \cdot m^2$, determina la aceleración angular en rad/s con que comienza a moverse la polea en su ascenso. Aproximar el resultado a una cifra decimal y considérese $g = 9.8\ m/s^2$.



Ejercicio 13.- Los dos discos de la figura tienen masa M y radio R iguales. El disco de la parte superior puede girar libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro. Una cuerda está enrollada alrededor de ambos discos y se le permite al disco de abajo que caiga. Hallar:

1) El descenso dx del centro de masas del disco de inferior si el superior gira un ángulo $d\theta_1$ (en sentido horario) y el inferior un ángulo $d\theta_2$ (en sentido antihorario).
2) La aceleración del centro del disco de abajo.
3) La tensión de la cuerda.
4) La aceleración angular del disco.
5) ¿Qué fuerza o fuerzas son responsables del incremento de energía cinética del sistema?





Ejercicio 14.- La figura muestra un objeto homogéneo susceptible de rodar cuyo momento de inercia respecto a su centro de masas es $\gamma m R^2$, siendo γ un número conocido, m su masa y R su radio. La fuerza horizontal F es conocida. El coeficiente de rozamiento de rodadura sin deslizamiento entre el suelo y el objeto es μ (también conocido). Como es sabido, existe un coeficiente de rozamiento crítico μ_c, de modo que si $\mu > \mu_c$, el sólido rueda sin deslizar. Se pide:

- Asumiendo $\mu > \mu_c$, es decir, si el sólido **rueda sin deslizar**:

1. Calcular el valor de la aceleración del centro de masa, la aceleración angular y la fuerza de rozamiento.
2. Valor h_0 para el cual la fuerza de rozamiento es nula. Si $h > h_0$, ¿qué sentido tiene la fuerza de rozamiento? ¿Y si es menor?
3. Valor del coeficiente de rozamiento crítico μ_c a partir del cual se produce rodadura sin deslizamiento.

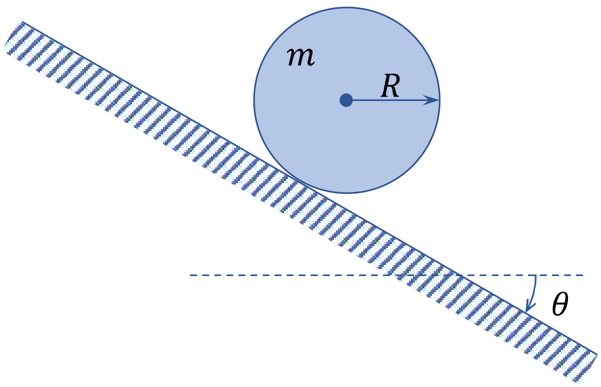
- Para un valor $\mu < \mu_c$, es decir, si el sólido **rueda y desliza**:

4. Calcular el valor de la fuerza de rozamiento, la aceleración de su centro de masas y su aceleración angular. ¿Qué relación existe entre ambas? Calcule cuánto se desplaza el CM del disco y cuantas vueltas da en función del tiempo. Suponga que el objeto parte del reposo.
5. Calcular el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento en función del tiempo. ¿Incrementa la energía del CM del objeto? ¿Y su energía cinética de rotación en torno al CM?

Ejercicio 15.- Una pelota de radio R y masa m tiene velocidad angular nula y velocidad de traslación v_0, deslizando sobre un suelo horizontal donde el coeficiente de rozamiento es μ. Encontrar el espacio que recorre hasta que comienza a rodar sin deslizar, y las vueltas que ha dado hasta ese momento. Encontrar la energía perdida en el proceso y la que se pierde durante los dos segundos siguientes a que comience a rodar sin deslizar. Nota: El momento de inercia de la pelota respecto a su CM es $\frac{2}{3} m R^2$.

Ejercicio 16.- Un objeto susceptible de girar, de masa m, radio exterior de apoyo R y momento de inercia respecto de su CM de valor $I_G = \gamma m R^2$ (γ conocido) se deposita en reposo sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. Sabiendo que el objeto **rueda sin deslizar**, se pide:

a) Aceleración del centro de masa y aceleración angular del objeto.
b) Valor de la fuerza de rozamiento. Si el deslizamiento es inminente, ¿cuánto vale el coeficiente de rozamiento, μ?
c) Energía disipada por la fuerza de rozamiento. ¿Se conserva la energía mecánica? Valor de la velocidad del CM del objeto cuando ha descendido una altura h respecto al horizonte.

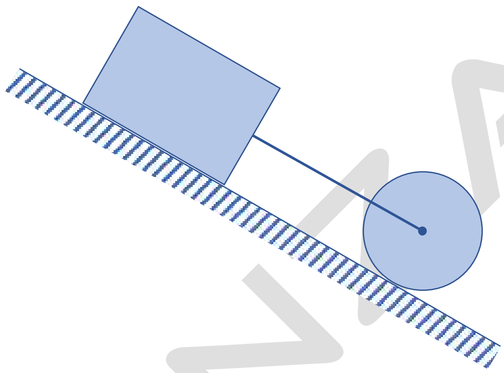


[**Bonus**: Un cilindro y una esfera se sitúan en reposo en lo alto de un plano inclinado. Asumiendo que bajan rodando sin deslizar, ¿cuál llega antes al final del plano?]

Ejercicio 17.- Un objeto susceptible de girar, de masa m, radio exterior de apoyo R y momento de inercia respecto de su CM de valor $I_G = \gamma m R^2$ (γ conocido) se deposita en reposo sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el objeto y el plano es μ. Sabiendo que el objeto **rueda y desliza**, se pide:

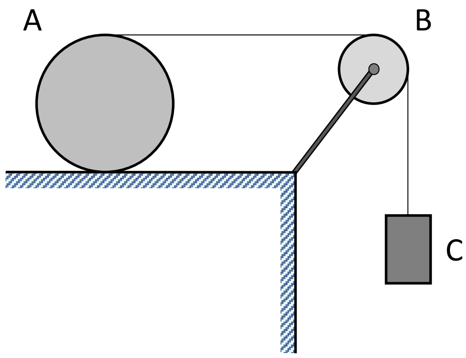
a) Una cota superior al valor de μ.
b) Obtener ahora la aceleración del centro de masa y aceleración angular del objeto.
c) Valor de la energía cinética del objeto cuando ha descendido una altura h y su velocidad angular.

Ejercicio 18.- Un cilindro de radio R y masa $M_2 = M$ y un cubo de masa $M_1 = M$ descienden por un plano inclinado rugoso, con velocidad constante de sus CM de valor v. El coeficiente de rozamiento es de tal naturaleza que el cilindro rueda sin deslizar. Están unidos por un hilo inextensible como indica la figura.



a) Obtener la energía cinética del sistema. ¿Cuál de los dos objetos, cilindro o cubo, posee más energía cinética?
b) Trabajo de rozamiento desarrollado cuando el sistema desciende una altura h (en sentido vertical). ¿Qué fuerzas disipan energía?

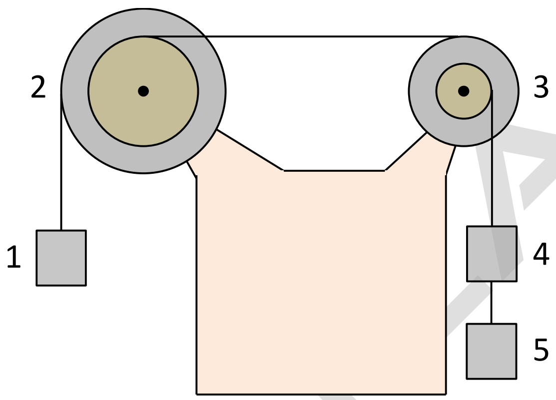
Ejercicio 19.- El cilindro A de la figura rueda sin deslizar y el hilo arrollado en su periferia se va desenrollando a medida que el bloque C desciende con aceleración. El hilo que conecta el cilindro A con el bloque C pasa por la polea B, existiendo rozamiento entre la polea y el hilo. La plataforma sobre la que rueda el cilindro A es rugosa. En cuanto a las masas de los tres cuerpos, se sabe que $m_A = 2m_B = 3m_C$, y que m_A vale $6\,kg$. Se sabe que el radio del cilindro A es R y el radio de la polea B es $R/2$, siendo desconocido el valor de R. Tómese $g = 9.8\,m/s^2$. Se pide calcular:



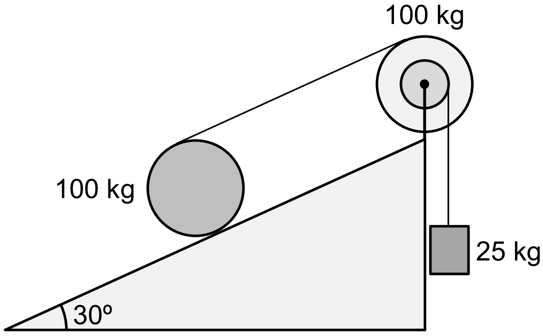
a) El valor de la aceleración a_C del cuerpo C.
b) El valor de la tensión del hilo T_1 en el tramo AB y el valor T_2 en el tramo BC.
c) El mínimo valor del coeficiente de rozamiento μ_m entre la plataforma y el cilindro A para que éste pueda rodar sin deslizar.

Ejercicio 20.- En el sistema de la figura, el cilindro **2** tiene masa M, radio R y un tambor de radio $R/2$. El cilindro **3** tiene la mitad de masa y la mitad de radio que el cilindro **2**. El tambor del cilindro **3** también tiene la mitad de radio que el tambor del cilindro **2**. Los bloques **1**, **4** y **5** tienen la misma masa m, igual a la cuarta parte de la masa del cilindro **2**. Se sabe además que el cilindro **2** tiene una masa de $5\ kg$ y un radio de $75\ cm$. Sobre el movimiento del sistema se sabe lo siguiente: el hilo del bloque **1** se desenrolla de la periferia del cilindro **2** a medida que el bloque **1** desciende, el hilo del tambor del cilindro **2** se enrolla a medida a medida que se desenrolla el hilo en la periferia del cilindro **3** y el hilo del tambor del cilindro **3** se enrolla a medida que los bloques **4** y **5** ascienden. Se pide calcular (tómese $g = 9{,}81\ m/s^2$):

a) Las aceleraciones a_1 y a_5 de los bloques **1** y **5**.
b) La aceleración angular α_2 del cilindro **2**.
c) La tensión T_1 del hilo del bloque 1 y la tensión T_4 del hilo que une los bloques **4** y **5**.



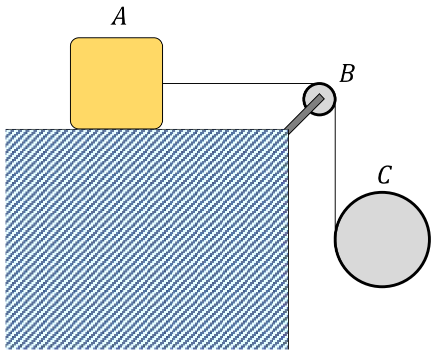
Ejercicio 21.- Un cilindro de $100\ kg$ de masa y radio R rueda sin deslizar por un plano inclinado $30º$ con la horizontal. En su descenso arrastra una cuerda inextensible y de masa despreciable que hace girar una polea situada en la parte alta del plano inclinado. Esta pole de $100\ kg$ de masa y radio exterior R está anclada en un rodamiento que impide su traslación, por lo que la polea únicamente gira sobre su eje en sentido contrario a las agujas del reloj. Esta polea dispone de un arrollamiento adicional, también inextensible y de masa despreciable, situado en un radio $R/2$ del centro, y a través del cual asciende una masa de $25\ kg$. Se pide calcular los siguientes valores:



a) La aceleración del centro de masas del cilindro que desciende por el plano inclinado.
b) La aceleración de la masa de $25\ kg$ que asciende verticalmente.
c) Las tensiones de ambas cuerdas.
d) El coeficiente de rozamiento mínimo que ha de existir entre el cilindro y el plano inclinado para que el cilindro pueda rodar sin deslizar.

Tómese $g = 10\ m/s^2$. Los momentos de inercia del cilindro y de la polea son $I_G = \frac{1}{2}MR^2$.

Ejercicio 22.- En el sistema de la figura, el bloque A desliza con rozamiento. La polea B no tiene rozamiento y el hilo es inextensible. EL disco C gira y se traslada verticalmente a medida que se desenrolla el hilo arrollado a su periferia. El disco tiene la misma masa M que el bloque, pero el valor de M es desconocido. El disco tiene radio $R = 50\ cm$. Se sabe que la tensión T del hilo vale el doble que la fuerza de rozamiento F_r entre el bloque y el suelo.



Se pide calcular:

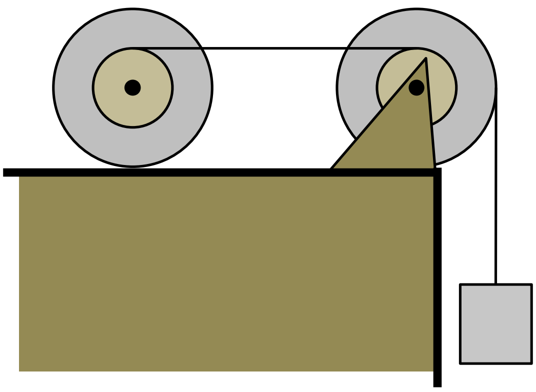
a) El coeficiente de rozamiento μ entre el bloque y el suelo.
b) El cociente a_2/a_1 siendo a_2 la aceleración del centro de masas del disco y a_1 la aceleración del bloque.
c) La aceleración angular α del disco.

Considérese el valor de la aceleración de la gravedad como $g = 9.8\ m/s^2$.

d) Encontrar el cociente a_2/a_1 si la cuerda que rodea al disco y con la cual roza, se ata al techo por su extremo derecho.

Ejercicio 23 - Para practicar (1) Sobre el plano horizontal, rugoso con coeficiente μ de rozamiento, rueda sin deslizar un cilindro de masa M y radio R. Un hilo está arrollado sobre un tambor de este cilindro de radio $r = R/2$ y su otro extremo está a su vez arrollado en el tambor pequeño de radio r, de la polea de masa M. De un segundo hilo, arrollado en el tambor grande de la polea, de radio R, cuelga un bloque también de masa M. Escríbase el sistema de 8 ecuaciones que permita conocer todas las aceleraciones y fuerzas desconocidas (excluyendo la reacción en los cojinetes de la polea, cuyo cálculo no interesa). ¿Cómo comprobaría numéricamente que, efectivamente, el cilindro rueda sin deslizar?

Nota: Considérese, a efectos de determinación de momentos de inercia, tanto el cilindro rodante como la polea cilindros de masa M y radio R.



Ejercicio 24 - Para practicar (2) El cilindro A asciende por el plano inclinado un ángulo $\varphi = 30º$, rodando sin deslizar, y el hilo que se desenrolla en su periferia se va enrollando en la periferia del cilindro B. El hilo que se desenrolla en el tambor del cilindro B se va enrollando en el tambor del cilindro C. El bloque D cae colgando del hilo que se desenrolla en la periferia del cilindro C. Todos los hilos son inextensibles y de masas despreciables. Los cilindros A, B y C tienen el mismo radio R y la misma masa M. El cuerpo D tienen masa $4M$. Los tambores de los cilindros B y C tienen radio $R/2$. Denotando por g la aceleración de la gravedad, establezca el conjunto de ecuaciones dinámicas y ligaduras cinemáticas que permitan la resolución del problema.