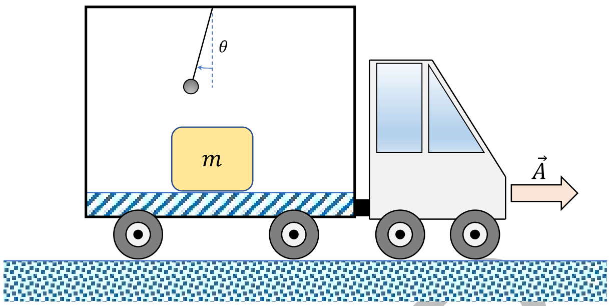
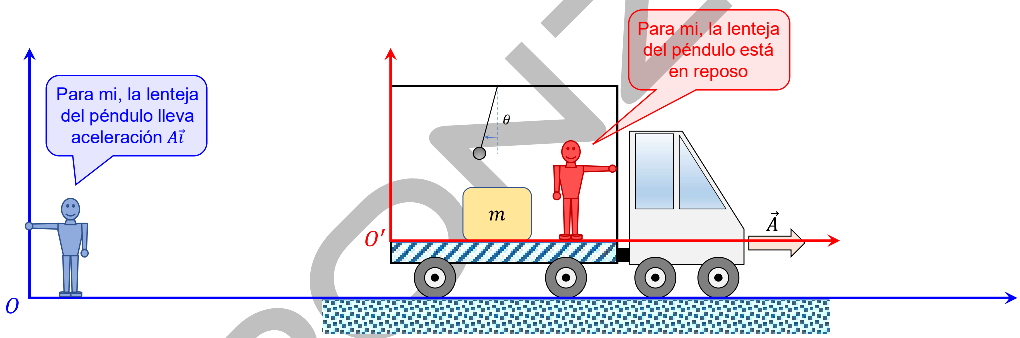
Ejercicio 1.- El camión de la figura posee una aceleración A hacia la derecha, tal como muestra la figura. Porta una masa m, que, para un observador en el camión, está en reposo, a punto de deslizar. En el techo hay un colgante que, para el mismo observador, está en reposo formando un ángulo θ respecto a la dirección vertical. El coeficiente de rozamiento estático entre la masa m y el suelo del remolque del camión es μ_e, mientras que el dinámico es $\mu_d = \frac{1}{2}\mu_e$. Se pide:



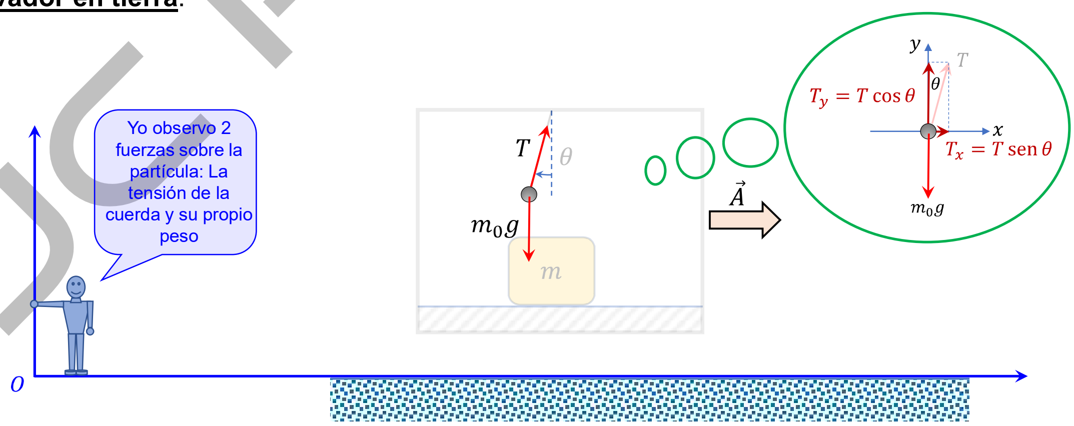
1) Conocido el ángulo θ y el valor de la masa m, encuentre el valor de la fuerza de rozamiento entre la masa m y el suelo del remolque del camión, y el valor de los coeficientes de rozamiento. Para estos cálculos utilice, en primer lugar, un observador en tierra, y, en segundo lugar, un observador en reposo en el remolque del camión.
2) Si, por un pequeño bache, la masa comienza a deslizar por el remolque, calcular la aceleración de la misma, para un observador en el camión y para un observador en tierra.

Solución (Denotemos por m_0 la masa de la lenteja del péndulo)

Apartado 1) Tenemos dos observadores, uno en tierra (sistema de referencias inercial) y otro en el camión (sistema de referencias no inercial):



• **<u>Observador en tierra</u>**:



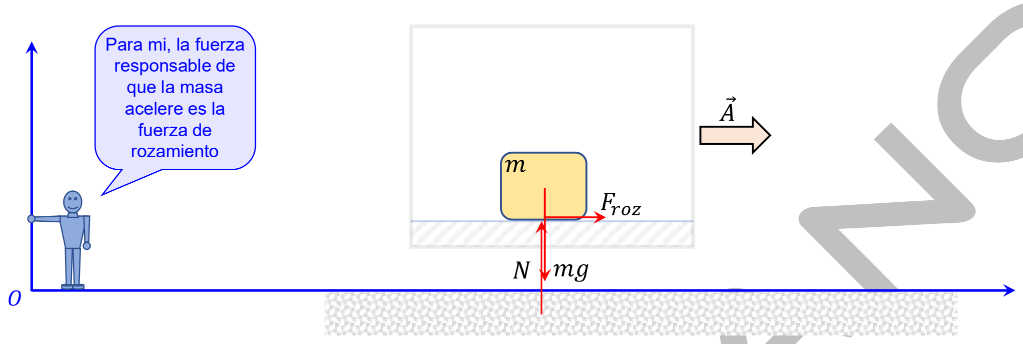
Descomponiendo las fuerzas en direcciones horizontal y vertical tenemos, aplicando la 2ª Ley de Newton,

$$\sum \vec{F} = m_0\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} [x] & -m_0 g + T\cos\theta = m_0 a_x = 0 \\ [y] & T\,\text{sen}\,\theta = m_0 a_y = m_0 A \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $T = \frac{m_0 g}{\cos\theta}$, que, en la segunda, nos permite obtener la aceleración del camión en función del ángulo de inclinación del péndulo:

$$A = g\tan\theta$$

Atendamos ahora a la masa m: Para el observador en tierra, su aceleración es también la del camión (está en reposo en el camión).



Aplicando la 2ª Ley de Newton de nuevo,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \begin{cases} [x] & F_{roz} = ma_x = mA \\ [y] & N - mg = ma_y = 0 \end{cases}$$

Dado que el deslizamiento de la masa es inminente, tenemos $F_{roz} = \mu_e N$. De la segunda ecuación, tenemos que $N = mg$, por lo que $F_{roz} = \mu_e mg$. Con todo esto, en la primera ecuación,

$$\mu_e mg = mA \Longrightarrow :\{A = g\tan\theta\}: \Longrightarrow \mu_e = \tan\theta$$

$$\mu_d = \frac{1}{2}\mu_e = \frac{1}{2}\tan\theta$$

$$F_{roz} = mg\tan\theta$$

• **Observador en el camión**: De todas las posibles fuerzas de inercia que actúan sobre m_0,

$$-m_0\vec{a}'_O - m_0\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - m_0\vec{\alpha}\times\vec{r}' - 2m_0\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

solo la primera de ellas es no nula ($\vec{\omega} = \vec{0}, \vec{\alpha} = \vec{0}, \vec{v}' = \vec{0}$): La aceleración del origen del sistema de referencias del camión es la de cualquier punto del camión, es decir, $\vec{a}'_O = A\vec{\imath}$. Por tanto,

$$\vec{F}_I = -m_0\vec{a}'_O = -m_0 A\vec{\imath}$$

El observador del camión observa la lenteja del péndulo en reposo (lo que en clase llamamos *equilibrio dinámico*). Las ecuaciones del movimiento para el observador del camión son, en general,

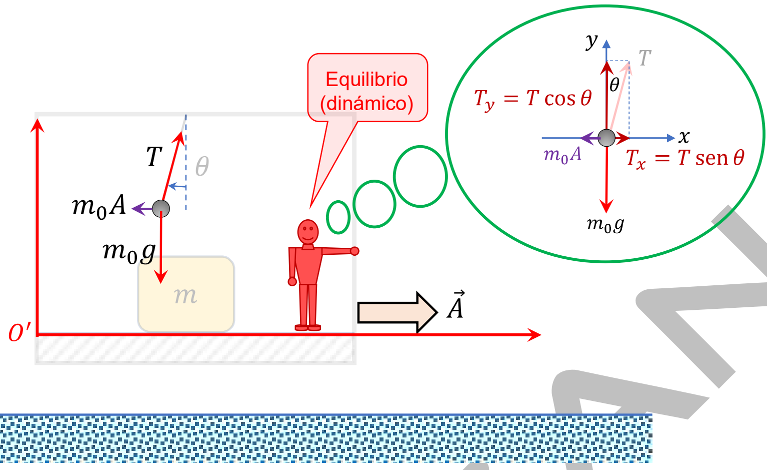
$$\sum \vec{F} + \sum \vec{F}_I = m_0\vec{a}' =:\{\text{reposo}\} := \vec{0}$$

En particular,

$$m_0\vec{g} + \vec{T} + (-m_0 A\vec{\imath}) = \vec{0}$$

Descomponiendo en ejes, tenemos

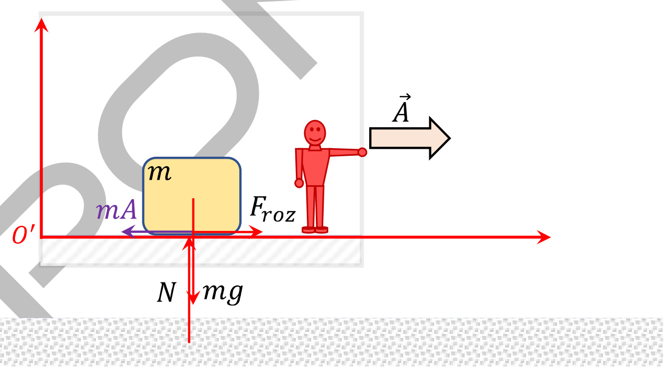
$$[x'] \quad T \,\mathrm{sen}\, \theta - m_0 A = 0$$
$$[y'] \quad T \cos\theta - m_0 g = 0$$



Dividiendo ambas expresiones, obtenemos de nuevo

$$A = g \tan\theta$$

Atendamos ahora a la masa m: Con los mismos argumentos que para la lenteja del péndulo, tenemos



$$[x'] \quad F_{roz} - mA = 0$$
$$[y'] \quad N - mg = 0$$

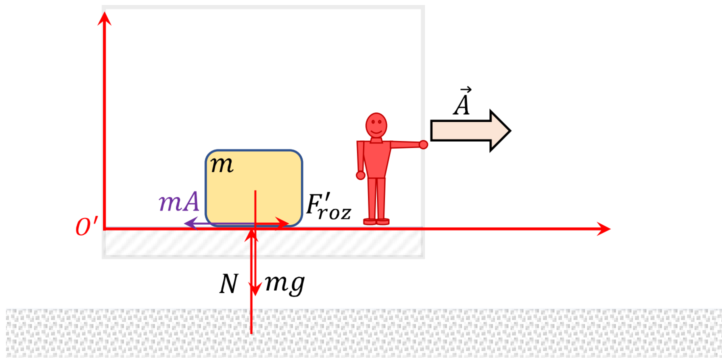
Siguiendo los razonamientos anteriores ($F_{roz} = \mu_e N = \mu_e mg$) obtenemos los mismos resultados:

$$\mu_e = \tan\theta\,, \qquad \mu_d = \frac{1}{2}\mu_e = \frac{1}{2}\tan\theta\,, \qquad F_{roz} = mg\tan\theta$$

Apartado 2) Al dar el camión un pequeño bache, y al ser $\mu_d < \mu_e$, la masa m en movimiento acelerado:

• **<u>Observador en el camión</u>**: Atendiendo solo al eje horizontal:

$$\sum F_x + \sum F_{I,x} = ma' \Rightarrow -mA + F'_{roz} = ma'$$



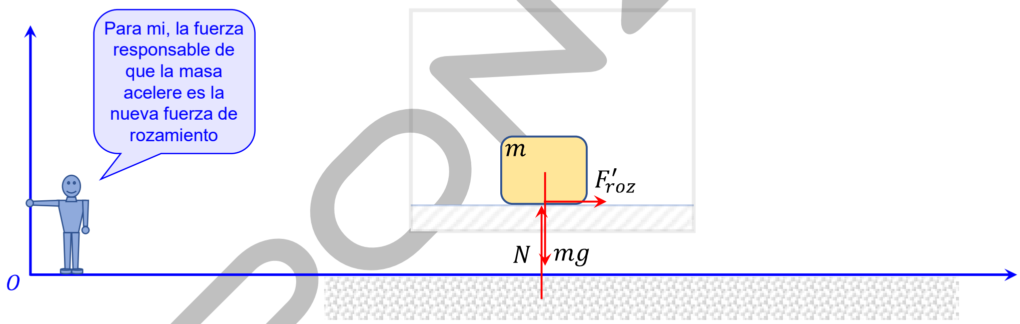
Por tanto, teniendo en cuenta que ahora $F'_{roz} = \mu_d mg < F_{roz}$, obtenemos

$$a' = -A + \mu_d g =: \left\{ \begin{array}{c} A = g\tan\theta \\ \mu_d = \frac{1}{2}\tan\theta \end{array} \right\} := -g\tan\theta + \frac{1}{2}g\tan\theta = -\frac{1}{2}g\tan\theta$$

Para el observador en el camión, la masa acelera hacia la izquierda con aceleración

$$\vec{a}' = -\frac{1}{2}g\tan\theta\,\vec{\imath}' =: \{\vec{\imath}' = \vec{\imath}\} := -\frac{1}{2}g\tan\theta\,\vec{\imath}$$

• **<u>Observador en tierra</u>**:



Atendiendo solo al eje horizontal:

$$\sum F_x = ma \Longrightarrow F'_{roz} = ma \Longrightarrow: \{F'_{roz} = \mu_d mg\} :\Longrightarrow a = \mu_d g$$

La aceleración de m para el observador en tierra es

$$\vec{a} = \mu_d g\vec{\imath} = \frac{1}{2}g\tan\theta\,\vec{\imath}$$

<u>NOTA IMPORTANTE</u>: Este resultado se puede obtener mediante las fórmulas de cinemática relativa:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}'_O + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + \vec{\alpha}\times\vec{r}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' =: \{\vec{\omega} = \vec{0}, \vec{\alpha} = \vec{0}\} := \vec{a}' + \vec{a}'_O$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}'_O =: \left\{ \begin{array}{c} \vec{a}' = -\frac{1}{2}g\tan\theta\,\vec{\imath} \\ \vec{a}'_O = -g\tan\theta\,\vec{\imath} \end{array} \right\} := \frac{1}{2}g\tan\theta\,\vec{\imath}$$