Ejercicio 7.- [**Recurso matemático**] Representa las cónicas siguiente:

1) $y = \frac{1}{2}x^2$
2) $x = 2y^2$
3) $(x-1)^2 + y^2 = 1$
4) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$
5) $x^2 - y^2 = 1$
6) $y^2 = 1 + x^2$
7) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

¿En que puntos sus radios de curvatura son máximos y mínimos?

1.2.- Problemas inversos

Ejercicio 8.- [**Recurso matemático**] Resolver la **ecuación diferencial** $\frac{dx}{dt} = \cos(t)$ con la condición inicial $x(0) = 1$ (es decir, encontrar la función $x(t)$ cuya derivada es $\cos(t)$ y que en $t = 0$ vale 1).

Ejercicio 9.- La posición inicial y la velocidad inicial de una partícula vienen dadas respectivamente, respecto cierto sistema de referencias, por los vectores $\vec{r}_0 = 2\vec{j}$ y $\vec{v}_0 = -2\vec{j} + 4\vec{k}$ (sistema internacional, SI)

• PROBLEMA 1.- Si la partícula está sometida a una aceleración constante de valor $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ (SI), encontrar los vectores velocidad $\vec{v}(t)$ y posición $\vec{r}(t)$ para cualquier instante de tiempo. ¿Qué tipo de trayectoria describe la partícula? ¿En qué instante la aceleración tangencial se anula? ¿Qué caracteriza ese instante? ¿Cuánto vale la aceleración normal en ese instante?

• PROBLEMA 2.- El móvil posee una aceleración $\vec{a} = 4t\vec{j}$. Calcular el vector velocidad $\vec{v}(t)$ y vector posición en función del tiempo, $\vec{r}(t)$.

NOTA: Recordar las expresiones del MRU y MRUA en una dimensión (eje x)

Ejercicio 10.- La aceleración tangencial de un móvil que parte con velocidad de $1\ m/s$ desde el punto A de determinada trayectoria viene dada por $a_T = \operatorname{senh} t\ (m \cdot s^{-2})$. Se pide:

1) Velocidad del móvil en cada instante de tiempo y el arco recorrido sobre la trayectoria desde el punto A, también en función del tiempo.

2) Encontrar la aceleración normal a_N en cada instante de tiempo si:

   a. Se trata de una trayectoria rectilínea.
   b. Se trata de una trayectoria circular de radio $R = 1\ m$.
   c. Se sabe que el radio de curvatura es $R_c(t) = \cosh t\ \ (m)$.
   d. Se trata de la trayectoria parabólica cuando el móvil está sometido a una aceleración variable $a(t) = \cosh t\ (m \cdot s^{-2})$. ¿Cuánto vale el radio de curvatura en función del tiempo?

Ejercicio 11

A) [**CASA**] Exprese las ecuaciones del ángulo $\theta(t)$ y velocidad angular $\omega(t)$ para un (**1**) **MCU** con velocidad angular ω constante conocida, con $\theta(t=0)=\theta_0$ y (**2**) **MCUA** con aceleración angular α constante conocida, con $\theta(t=0)=\theta_0, \omega(t=0)=\omega_0$. Para este último caso, relacionarlas con el arco, el módulo de la velocidad y la aceleración normal, si se sabe que el radio de la trayectoria es $R=50\ cm$. ¿Podrías encontrar una relación entre θ, ω, ω_0 y α independiente del tiempo?

B) Un móvil describe una trayectoria circular de radio $3\ m$ centrada en el plano xy, partiendo de la posición $(3{,}0)\ m$ con velocidad inicial $(0{,}3)\ m/s$. Se sabe que la aceleración angular sigue la ley $\alpha(t)=2t\ rad/s^2$.

a. Aceleración tangencial del móvil.
b. Velocidad angular y módulo de la velocidad en función del tiempo. Aceleración normal.
c. Ángulo (respecto al eje ox) y arco recorrido en función del tiempo.

PROBLEMAS ADICIONALES CON SOLUCIÓN

Ejercicio 12.- Un punto móvil parte del origen de coordenadas, con una velocidad inicial de módulo v_0 paralela al eje OX. Se mueve en el plano XOY con una aceleración de módulo a constante y paralela al eje OY. Al cabo de un cierto tiempo pasa por el punto P_1 del que se conoce su coordenada y_1. Calcúlese la coordenada x_1 del punto P_1.

Solución: $x_1 = v_0\sqrt{\frac{2y_1}{a}}$

Ejercicio 13.- Un punto móvil se mueve dentro del plano XOY. Tiene una aceleración de módulo variable tal que sus componentes cartesianas son $a_x = C_1 t$ y $a_y = C_2 t$ donde t es el tiempo y C_1 y C_2 constantes conocidas. El punto parte en el instante inicial del origen de coordenadas con velocidad inicial nula. En un cierto instante pasa por el punto P_1 del que se conoce su coordenada y_1. Se pide calcular el valor de la coordenada x_1 de P_1.

Solución: $x_1 = \left(\frac{C_1}{C_2}\right) y_1$

Ejercicio 14.- Un punto móvil se mueve en el plano XOY con aceleración constante a paralela al eje OY. En el instante inicial parte de P_0 de coordenadas conocidas x_0 e y_0, siendo su velocidad inicial v_0 paralela al eje OX. Se pide calcular el valor de v_0 para que posteriormente pase por el punto $P_1(x_1, y_1)$ conocido.

Solución: $v_0 = (x_1 - x_0)\sqrt{\frac{a}{2(y_1-y_0)}}$

Ejercicio 15.- Un punto móvil describe una trayectoria plana con aceleración paralela al eje de coordenadas OX y de módulo variable según $a = Ct$ donde t es el tiempo y C una constante desconocida. El móvil parte del origen de coordenadas con una velocidad v_0 paralela al eje OY. Un cierto tiempo después pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ conocido. Se pide calcular, el valor de C.

Solución: $C = 6x_1\left(\frac{v_0}{y_1}\right)^3$

Ejercicio 16.- Un punto móvil realiza un movimiento contenido en el plano XOY con una aceleración constante y conocida, cuyas componentes son a_x y a_y. El móvil parte del origen de coordenadas con velocidad inicial nula. Al cabo de un cierto tiempo pasa por el punto P_1 de primera coordenada x_1 conocida. Se pide calcular la componente v_{1y} de la velocidad del móvil en P_1 sobre el eje OY.

Solución: $v_{1y} = a_y\sqrt{\frac{2x_1}{a_x}}$

Ejercicio 17.- Un punto móvil realiza un movimiento contenido en el plano XOY con una aceleración cuyas componentes cartesianas son $a_x = Ct$ y $a_y = 5t^2 + 3$, donde t es el tiempo y C una constante conocida. El punto parte de la posición P_0 y al cabo de cierto tiempo pasa por el punto P_1. Se conocen las primeras coordenadas x_0 y x_1 de esos puntos y se sabe que la velocidad del móvil en la posición inicial es nula.
Se pide calcular, con un decimal, el valor t_1 del tiempo que tarda el móvil en llegar a P_1.

Solución: $t_1 = \left[\frac{C}{6}(x_1 - x_0)\right]^{1/3}$

Ejercicio 18.- De un punto móvil se sabe que su coordenada x en el instante inicial es 1. La proyección de la velocidad sobre el eje OY es 1 para todo instante de tiempo. Además, se conocen la ecuación de su trayectoria sobre el plano XY y la coordenada z con respecto al tiempo que se muestran a continuación:

$$x = \frac{2}{3}c(y - c)^3 + 1, \qquad z = \sqrt{c}t^2$$

Calcular la aceleración normal para los valores del tiempo t y de la constante c dados en el enunciado del problema (es decir, en función de t y c).

Solución: $a_N = \sqrt{4c}$

1.3.- Otros problemas inversos

Ejercicio 19

(A) Describa el proceso para encontrar la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$ en un movimiento rectilíneo del cual conocemos la aceleración en función de la velocidad, $a(v)$, además de la posición inicial x_0 y velocidad inicial v_0.

(B) Describa el proceso para encontrar el módulo de la velocidad $v(t)$ y la ley horaria $s(t)$ en un movimiento arbitrario del cual conocemos la aceleración tangencial en función del módulo de la velocidad, $a_T(v)$, además del origen de arcos $s_0 = 0$ y módulo de la velocidad inicial v_0.

(C) Se sabe que la aceleración de un paracaidista que se deja caer desde gran altura viene dada, en términos de su velocidad v (sentido vertical y descendente) como $a(v) = g - cv$, siendo $g = 9.8\ m/s^2$ la aceleración de la gravedad y c una constante de amortiguamiento debida al rozamiento con el aire. Se pide:

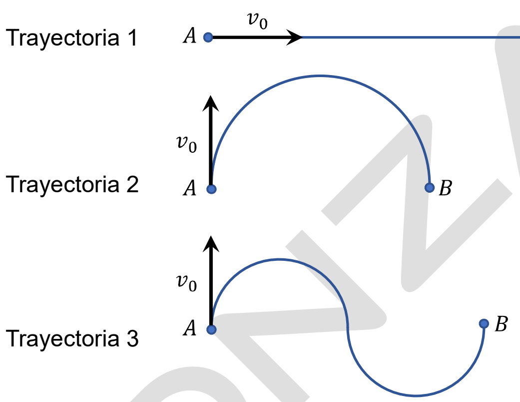
a. Valor de la constante y unidades sabiendo que la velocidad límite son $250\ km/h$.
b. Metros descendidos en función del tiempo si parte del reposo.

Ejercicio 20

(A) Describa el proceso para encontrar la velocidad y la posición en un movimiento rectilíneo del cual conocemos la aceleración en función de la posición, $a(x)$, además de la posición inicial x_0 y velocidad inicial v_0.

(B) La aceleración de cierto movimiento rectilíneo según el eje ox cumple la ley $a(x) = -16x$. Se sabe que su velocidad en el origen de coordenadas es $v_0 = 4\ m/s$ según el eje ox positivo, en el instante inicial. Resolver la expresión $x(t)$.

Ejercicio 21.- En las tres trayectorias de la figura, la partícula parte del punto A con velocidad inicial $v_0 = 1\ m/s$ y aceleración tangencial constante $a_T = 1\ m/s^2$. Las tres trayectorias miden lo mismo, $L = 4\ m$. La trayectoria 2 es un arco de media circunferencia mientras que la trayectoria 3 son dos arcos unidos de semicircunferencia. Se pide:



a) Ley horaria. Tiempo que tardan en alcanzar el punto B, y velocidad con la que lo alcanzan.
b) Componentes intrínsecas de la aceleración en el punto B.

Ejercicio 22

(A) Describa el proceso para encontrar el módulo de la velocidad y el arco recorrido en un movimiento curvilíneo del cual conocemos la aceleración tangencial en función del arco, $a_T(s)$, además de la velocidad inicial v_0. ¿Qué necesitamos para obtener la aceleración normal?

(B) La pista de la figura está situada en el plano horizontal. Un punto móvil al desplazarse sobre ella está sometida a una aceleración tangencial opuesta al movimiento y proporcional al espacio recorrido tal que $|\vec{a}_T| = k \cdot s$.

1) Hallar la velocidad mínima con la que debe lanzarse el punto móvil desde A, para que recorra la pista $ABCDA$.
2) Razonar en qué punto del recorrido la aceleración normal del móvil es máxima.